

درسنامه + روش‌های تدریس + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

آمار و احتمال (یازدهم)

ویراست دوم

علیرضا علی‌پور



انتشارات
گنگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای آمار و احتمال سال یازدهم و با هدف کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای فصل گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به دست خواهید آورد.

در این ویراست درس‌نامه‌ها با تعداد قابل توجهی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای غنی شده‌اند. به طوری که این پرسش‌ها پوشش‌دهنده همه نکات و مفاهیم درس مربوط به آن هستند.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعه هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «آمار و احتمال سه بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی و مهدیه جمشیدی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و عاطفه توین برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حرفه‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلف



فهرست

◆ فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

۲	درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
۱۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۸	خودآزمایی (۱)
۱۹	خودآزمایی (۲)
۲۱	درس‌های دوم و سوم: مجموعه - زیرمجموعه - جبر مجموعه‌ها
۳۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۸	خودآزمایی (۳)
۳۹	خودآزمایی (۴)

◆ فصل دوم: احتمال

۴۲	درس اول: مبانی احتمال
۴۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۲	خودآزمایی (۵)
۵۴	درس دوم: احتمال غیر هم‌شانس
۵۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۸	خودآزمایی (۶)
۵۹	درس سوم: احتمال شرطی
۶۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۷۱	خودآزمایی (۷)
۷۲	خودآزمایی (۸)
۷۴	درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته
۷۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۸۱	خودآزمایی (۹)



◆ فصل سوم: آمار توصیفی

۸۴ درس اول، توصیف و نمایش داده‌ها

۸۷ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۹۰ خودآزمایی (۱۰)

۹۲ درس دوم، معیارهای گرایش به مرکز

۹۶ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۰۰ خودآزمایی (۱۱)

۱۰۲ درس سوم، معیارهای پراکندگی

۱۰۶ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۰۹ خودآزمایی (۱۲)

◆ فصل چهارم: آمار استنباطی

۱۱۲ درس اول، گردآوری داده‌ها

۱۱۵ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۱۷ خودآزمایی (۱۳)

۱۱۹ درس دوم، برآورد

۱۲۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲۲ خودآزمایی (۱۴)

◆ فصل پنجم: پاسخ‌های تشریحی

۱۲۴ پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

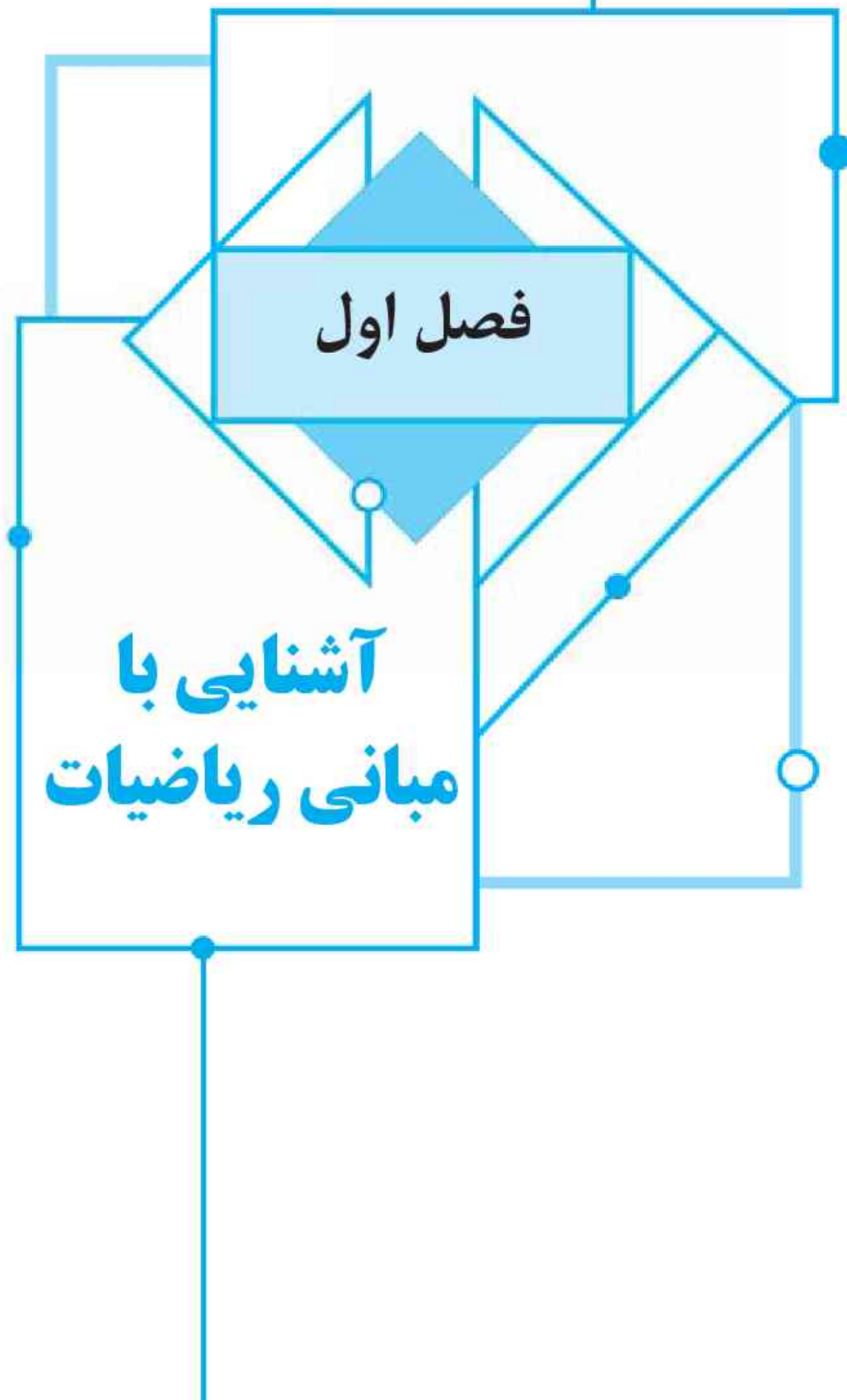
◆ فصل ششم: پاسخنامه کلیدی خودآزمایی‌ها

۱۷۶ پاسخنامه کلیدی خودآزمایی‌ها

◆ فصل هفتم: گنگور سواسری ۹۹

۱۷۷ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۷۸ پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای



فصل اول

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

تعریف به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) داشته باشد، گزاره می‌گوییم.

معمولاً گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می‌دهیم. درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نشان می‌دهیم. توجه کنید که یک گزاره نمی‌تواند هم درست باشد هم نادرست؛ یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. همچنین جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

تست ۱ کدام جمله یک گزاره است؟

- (۱) $\sqrt{\pi}$ را حساب کنید. (۲) $1+2+3=5$ (۳) آیا π عددی مثبت است؟ (۴) چه هوای دلپذیری!

راهنما جمله‌های گزینه‌های اول، سوم و چهارم به ترتیب امری، پرسشی و عاطفی هستند. بنابراین هیچ‌یک از این سه جمله گزاره نیستند. تنها جمله خبری جمله گزینه (۲) است (و البته توجه کنید که ارزش این گزاره نادرست است).

تست ۲ ارزش کدام گزاره درست است؟

- (۱) ۳۹ عددی اول است. (۲) $3+4 \geq 2$ (۳) ماه آبان ۳۱ روزه است. (۴) پکن پایتخت ژاپن است.

راهنما گزاره‌های گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست‌اند. زیرا ۳۹ عددی اول نیست، ماه آبان ۳۱ روزه نیست و پکن پایتخت ژاپن نیست ولی گزاره گزینه (۲) درست است.

جدول ارزش گزاره‌ها

چون هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش درست یا نادرست را داشته باشد، پس اگر n گزاره داشته باشیم، بنابر اصل ضرب، ارزش این گزاره‌ها 2^n حالت مختلف می‌تواند داشته باشد. می‌توانیم جدولی با n ستون و 2^n سطر در نظر بگیریم که هر سطر آن متناظر با یکی از این 2^n حالت باشد. جدول ارزش n گزاره به ازای $n=1, 2, 3$ به صورت زیر است.

p	q	r
۱	۱	۱
۱	۱	۰
۱	۰	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۱	۰
۰	۰	۱
۰	۰	۰

تست ۳ جدول ارزش تعدادی گزاره ۱۲۸ حالت دارد. در چندتا از این ۱۲۸ حالت ارزش دقیقاً سه گزاره درست است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۳۵

راهنما اگر تعداد گزاره‌ها برابر n باشد، آن‌گاه $2^n = 128$. پس $n=7$. چون در جدول ارزش همه حالت‌های درست و نادرست بودن گزاره‌ها آمده است، پس تعداد حالت‌هایی که ارزش دقیقاً سه تا از هفت گزاره درست است برابر است با

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$



تعریف

- هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیرها به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.
- گزاره‌نما را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.
 - در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نشان می‌دهیم.
 - در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم. توجه کنید که $S \subseteq D$.

نست

مجموعه جواب گزاره‌نمای « x عددی فرد و مضرب 7 است» با دامنه $D = \{1, 2, \dots, 50\}$ چند عضو دارد؟

۲۸ (۴)

۷ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

راه‌حل

فقط به‌ازای $x = 7, 21, 35, 49$ گزاره‌نمای داده شده تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست می‌شود، بنابراین مجموعه جواب این گزاره‌نما با دامنه D ، چهار عضو دارد.

ترکیب گزاره‌ها

تعریف

نفی گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. به علامت « \sim » **ناقض** می‌گوییم.

جدول ارزش گزاره $\sim p$ به صورت زیر است.

p	$\sim p$
۱	۰
۰	۱

نست

نفی گزاره «بیشترین حقوق کارمندان این شرکت متعلق به حامد است» کدام است؟

- (۱) کمترین حقوق کارمندان این شرکت متعلق به حامد است.
- (۲) حامد کارمند این شرکت نیست.
- (۳) بیشترین حقوق کارمندان این شرکت متعلق به فردی غیر از حامد است.
- (۴) بیشترین حقوق کارمندان این شرکت متعلق به حامد نیست.

راه‌حل

نفی گزاره داده شده به صورت «چنین نیست که بیشترین حقوق کارمندان این شرکت متعلق به حامد است» یا به طور ساده‌تر «بیشترین حقوق کارمندان این شرکت متعلق به حامد نیست» است.

تعریف

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » را که به صورت $p \vee q$ نمایش داده می‌شود، **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. به رابط منطقی « \vee » **فاصل** می‌گوییم.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰



تست

ارزش کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) ۳ بر ۹ بخش پذیر است یا ۱۳ عددی اول است.
 (۲) ۸ بر ۲ بخش پذیر نیست یا ۲۹ عددی مرکب است.
 (۳) یکشنبه روز اول هفته نیست یا ۸ عددی فرد نیست.
 (۴) ۹ عددی اول نیست یا ۶ از ۱۰ بزرگ تر است.

راه حل

گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.
 گزاره «۳ بر ۹ بخش پذیر است» نادرست و گزاره «۱۳ عددی اول است» درست است. پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.
گزینه (۲) گزاره «۸ بر ۲ بخش پذیر نیست» نادرست و گزاره «۲۹ عددی مرکب است» نیز نادرست است. پس ترکیب فصلی این دو گزاره نادرست است.
گزینه (۳) گزاره «یکشنبه روز اول هفته نیست» درست و گزاره «۸ عددی فرد نیست» نیز درست است. پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.
گزینه (۴) گزاره «۹ عددی اول نیست» درست و گزاره «۶ از ۱۰ بزرگ تر است» نادرست است. پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.

تعریف

هرگاه p و q دو گزاره باشند. گزاره مرکب « p و q » را که به صورت $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود. **ترکیب عطفی** دو گزاره می‌گوییم. به رابط منطقی « \wedge » **عاطف** می‌گوییم.

جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \wedge q$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

تست

فرض کنید p گزاره «هفته پنج روز دارد» و q گزاره «۳ عددی اول است» باشد. در این صورت ارزش گزاره $p \vee q$
 و ارزش گزاره $p \wedge q$ است.

- (۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست

راه حل

چون هفته هفت روز دارد، پس p گزاره‌ای نادرست و چون ۳ عددی اول است، پس q گزاره‌ای درست است. بنابراین $p \vee q$ گزاره‌ای درست و $p \wedge q$ گزاره‌ای نادرست است.

تست

فرض کنید p و q گزاره‌هایی درست باشند. ارزش کدام گزاره درست است؟

- (۱) $\neg p \wedge (p \vee q)$ (۲) $p \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (۳) $\neg p \vee (p \wedge \neg q)$ (۴) $p \vee (\neg p \wedge \neg q)$

راه حل

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۰

گزینه (۱)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge (\neg p \vee \neg q)$
۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۰

گزینه (۲)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \vee (p \wedge \neg q)$
۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱

گزینه (۳)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee (\neg p \wedge \neg q)$
۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱

گزینه (۴)

پس در بین چهار گزاره داده شده فقط ارزش گزاره $p \vee (\neg p \wedge \neg q)$ درست است.



تعریف هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «اگر p ، آن گاه q » را که به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش داده می‌شود، **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم.
در این ترکیب شرطی p را **مقدم (فرض)** و q را **تالی (حکم)** می‌نامیم.

جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۱

همان‌گونه که در این جدول ملاحظه می‌کنید، هرگاه ارزش p مقدم نادرست باشد، ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ درست است و ارزش آن به ارزش q بستگی ندارد. در این حالت می‌گوییم گزاره $p \Rightarrow q$ به **انتفای مقدم** درست است.
به گزاره $q \Rightarrow p$ **عکس ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ و به گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

نست ۹ فرض کنید p گزاره «تهران پایتخت ایران است» و q گزاره « $5 > 3$ » باشد. ارزش کدام گزاره نادرست است؟
(۱) $p \Rightarrow q$ (۲) $p \Rightarrow \sim q$ (۳) $\sim p \Rightarrow q$ (۴) $\sim p \Rightarrow \sim q$

راه‌حل چون تهران پایتخت ایران است و $5 > 3$ ، پس هر دو گزاره p و q درست‌اند. طبق جدول، ارزش ترکیب شرطی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. در نتیجه در بین چهار ترکیب شرطی داده شده فقط ارزش گزاره $p \Rightarrow \sim q$ نادرست است.

نست ۱۰ در چند حالت از ۴ حالت جدول ارزش گزاره $p \wedge (q \Rightarrow \sim p)$ ارزش این گزاره درست است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر

جدول ارزش گزاره $p \wedge (q \Rightarrow \sim p)$ به صورت زیر است:

p	q	$\sim p$	$q \Rightarrow \sim p$	$p \wedge (q \Rightarrow \sim p)$
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰

پس فقط در یکی از ۴ حالت ارزش این گزاره درست است.

نست ۱۱ کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) گزاره «اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$ » به انتفای مقدم درست است.
- (۲) عکس ترکیب شرطی «اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$ » گزاره «اگر $5 > 3$ ، آن گاه $2 > 3$ » است.
- (۳) عکس نقیض ترکیب شرطی «اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$ » گزاره «اگر $5 \leq 3$ ، آن گاه $2 \leq 3$ » است.
- (۴) اگر گزاره « $p \Rightarrow q$ » درست باشد، آن گاه گزاره « $q \Rightarrow p$ » نیز درست است.

گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند ولی گزینه (۴) درست نیست.

گزینه (۱) چون گزاره « $2 > 3$ » نادرست است، پس گزاره «اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$ » به انتفای مقدم درست است.
گزینه (۲) چون عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » گزاره « $q \Rightarrow p$ » است، پس عکس ترکیب شرطی «اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$ » گزاره «اگر $5 > 3$ ، آن گاه $2 > 3$ » است.
گزینه (۳) چون عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ »، نقیض گزاره « $2 > 3$ » گزاره « $2 \leq 3$ » و نقیض گزاره « $5 > 3$ » گزاره « $5 \leq 3$ » است، پس عکس نقیض گزاره «اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$ » گزاره «اگر $5 \leq 3$ ، آن گاه $2 \leq 3$ » است.
گزینه (۴) اگر p نادرست و q درست باشد، آن گاه گزاره « $p \Rightarrow q$ » درست و گزاره « $q \Rightarrow p$ » نادرست است. بنابراین از درست بودن گزاره « $p \Rightarrow q$ » درست بودن گزاره « $q \Rightarrow p$ » نتیجه نمی‌شود.



تعریف هرگاه p و q دو گزاره باشند، به گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ که آن را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم، ترکیب دو شرطی دو گزاره می‌گوییم. گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت «اگر p ، آن گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» یا « p اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم.

جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱

تست ۱۲

ارزش کدام ترکیب دو شرطی درست است؟

(۱) عددی اول است اگر و تنها اگر ۳ عددی زوج باشد.
 (۲) ۳ عددی زوج است اگر و تنها اگر $2 > 5$.
 (۳) $2 = 2$ اگر و تنها اگر ۷ عددی زوج باشد.
 (۴) ۶ عددی فرد است اگر و تنها اگر $1 + 2 = 3$.

راه حل

طبق جدول، ارزش ترکیب دو شرطی دو گزاره در صورتی درست است که دو گزاره هم‌ارزش باشند. در گزینه (۲) هر دو گزاره «۳ عددی زوج است» و « $2 > 5$ » نادرست‌اند، بنابراین ارزش ترکیب دو شرطی این دو گزاره درست است.

تست ۱۳

اگر گزاره‌های p و q نادرست باشند، ارزش کدام گزاره درست است؟

(۱) $p \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$ (۲) $p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ (۳) $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ (۴) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow q$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$
۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow q$
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۰

پس فقط گزاره $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ درست است.

تعریف اگر دو گزاره p و q در همه حالات هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم « p هم‌ارز است با q ». در این حالت p و q را هم‌ارز منطقی می‌نامیم.

هم‌ارزی‌های منطقی

- (۱) نقیض نقیض هر گزاره با خود آن گزاره هم‌ارز است.

$$\sim(\sim p) \equiv p$$
- (۲) قوانین جابه‌جایی

$$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$
- (۳) قوانین شرکت‌پذیری

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge r, \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee r, \quad p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$$
- (۴) قوانین توزیع‌پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
- (۵) قوانین دمورگان

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q, \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$



$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad (6)$$

(۷) قوانین جذب

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

(۸) هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q \quad (9)$$

◆ غیر از هم‌ارزی‌های فوق تعداد دیگری هم‌ارزی که در حل مسئله‌ها بسیار کلیدی دارند در جدول زیر فهرست شده است.

ترکیب فصلی	ترکیب عطفی	ترکیب شرطی	ترکیب دو شرطی
$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	$p \Rightarrow p \equiv T$	$p \Leftrightarrow p \equiv T$
$p \vee \sim p \equiv T$	$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \Rightarrow F \equiv \sim p$	$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$
$p \vee F \equiv p$	$p \wedge F \equiv F$	$p \Rightarrow T \equiv T$	$p \Leftrightarrow T \equiv p$
$p \vee T \equiv T$	$p \wedge T \equiv p$	$F \Rightarrow p \equiv T$	$p \Leftrightarrow F \equiv \sim p$
		$T \Rightarrow p \equiv p$	

نست ۱۴ گزاره $p \wedge (\sim p \vee q)$ هم‌ارز کدام است؟

پ (۱) q (۲) $p \wedge q$ (۳) $p \vee q$ (۴)

راه‌حل

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \quad (\text{A} \circ \text{A} \cap \text{B} \vee \text{A})$$

$$\equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

نست ۱۵ نقیض گزاره «امروز سرد است و فردا دوشنبه است» کدام است؟

(۱) امروز سرد نیست یا فردا دوشنبه نیست.
 (۲) امروز سرد نیست و فردا دوشنبه نیست.
 (۳) امروز گرم است یا فردا سه‌شنبه است.
 (۴) امروز سرد نیست و فردا یکشنبه است.

راه‌حل

طبق قانون دمورگان نقیض گزاره « $p \wedge q$ » گزاره « $\sim p \vee \sim q$ » است. بنابراین نقیض گزاره «امروز سرد است و فردا دوشنبه است» گزاره «امروز سرد نیست یا فردا دوشنبه نیست» است.

نست ۱۶ گزاره $(p \Rightarrow q) \vee r$ هم‌ارز کدام است؟

پ (۱) $p \Rightarrow (q \vee r)$ (۲) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ (۳) $p \wedge (q \Rightarrow r)$ (۴)

راه‌حل

$$(p \Rightarrow q) \vee r \equiv (\sim p \vee q) \vee r \equiv \sim p \vee (q \vee r) \quad (\text{A} \circ \text{A} \cap \text{B} \vee \sim \text{C})$$

$$\equiv p \Rightarrow (q \vee r)$$

نست ۱۷ گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ هم‌ارز کدام است؟

پ (۱) q (۲) T (۳) F (۴)

راه‌حل

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv \sim p \vee (q \Rightarrow p) \equiv \sim p \vee (\sim q \vee p)$$

$$\equiv \sim p \vee (p \vee \sim q) \quad (\text{A} \wedge \text{A} \vee \text{B} \vee \text{C})$$

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q \quad (\text{A} \circ \text{A} \cap \text{B} \vee \sim \text{C})$$

$$\equiv T \vee \sim q \equiv T$$



تعریف به گزاره‌ای که ارزش آن در همه حالت‌ها درست باشد گزاره همیشه درست و به گزاره‌ای که ارزش آن همیشه نادرست باشد، گزاره همیشه نادرست می‌گوییم.

مثلاً با توجه به جدول قبل $p \vee \sim p$ گزاره‌ای همیشه درست و $p \wedge \sim p$ گزاره‌ای همیشه نادرست است.

نکته ۱ گزاره‌های $(p \wedge q) \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow (p \vee q)$ همیشه درست‌اند.

تست ۱۸

کدام گزاره همواره درست است؟

- (۱) $p \Rightarrow \sim p$ (۲) $p \vee (p \Rightarrow \sim p)$ (۳) $p \wedge (p \vee \sim p)$ (۴) $p \vee (p \wedge \sim p)$

گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

راهنجا

گزینه (۱)

$$p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee \sim p \equiv \sim p$$

گزینه (۲)

$$p \vee (p \Rightarrow \sim p) \equiv p \vee (\sim p \vee \sim p) \equiv p \vee \sim p \equiv T$$

گزینه (۳)

$$p \wedge (p \vee \sim p) \equiv p \wedge T \equiv p$$

گزینه (۴)

$$p \vee (p \wedge \sim p) \equiv p \vee F \equiv p$$

تست ۱۹

کدام گزاره همواره نادرست است؟

- (۱) $p \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ (۲) $p \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ (۳) $p \wedge (p \Rightarrow \sim p)$ (۴) $p \wedge (\sim p \Rightarrow p)$

گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

راهنجا

گزینه (۱) توجه کنید که اگر p و q نادرست باشند، گزاره $p \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ درست است. پس این گزاره نمی‌تواند همواره نادرست باشد.

گزینه (۲) توجه کنید که اگر p و q درست باشند، گزاره $p \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ درست است. پس این گزاره نیز نمی‌تواند همواره نادرست باشد.

گزینه (۳)

$$p \wedge (p \Rightarrow \sim p) \equiv p \wedge (\sim p \vee \sim p) \equiv p \wedge \sim p \equiv F$$

گزینه (۴)

$$p \wedge (\sim p \Rightarrow p) \equiv p \wedge (\sim(\sim p) \vee p) \equiv p \wedge (p \vee p) \equiv p \wedge p \equiv p$$

سورها

عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی» به سور معروف‌اند. این عبارتها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

برای بیان عبارتها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای جمع مقادیر» از نماد \forall و به جای «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

تست ۲۰

نمایش گزاره «برای هر عدد حقیقی ناصفر مانند x ، x^2 عددی مثبت است.» با استفاده از نمادهای ریاضی به کدام صورت است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$ (۲) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$ (۳) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: x^2 > 0$ (۴) $\exists x \in \mathbb{R} - \{0\}: x^2 > 0$

گزینه (۳) درست است.

راهنجا



توجه گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت دیگر مثال نقض نداشته باشد.

• گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

سخت ۲۱

کدام گزاره درست است؟

(۱) $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ (۲) $\exists x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ (۳) $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$ (۴) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \notin \mathbb{Z}$

راه‌حل

گزاره‌نمای « $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} مثال نقض دارد. مثلاً به‌ازای عدد صحیح $x=2$ ، $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$. در نتیجه گزاره گزینه (۱) نادرست است. مجموعه جواب گزاره‌نمای « $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} برابر $\{1, -1\}$ است. چون مجموعه جواب ناتهی است، پس گزاره گزینه (۲) درست است. گزاره نمای « $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} مثال نقض دارد. مثلاً به‌ازای عدد صحیح $x=1$ ، $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. بنابراین گزاره گزینه (۳) نادرست است. مجموعه جواب گزاره‌نمای « $x^2 \notin \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} برابر تهی است. زیرا مربع هر عدد صحیح عددی صحیح است. بنابراین گزاره گزینه (۴) نادرست است.

نقیض گزاره‌های سوری

نقیضه ۲

(۱) $\neg(\forall x : p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$
 (۲) $\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x : \neg p(x)$

سخت ۲۲

کدام گزینه درست نیست؟

(۱) $\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$
 (۲) $\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$
 (۳) $\neg(\forall x \in \mathbb{Z} : 2x \in \mathbb{Z}) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \notin \mathbb{Z}$
 (۴) $\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 2) \equiv \forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \neq 2$

راه‌حل

گزینه (۱) درست نیست. رابطه درست این گزینه به صورت زیر است:

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 = 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1$$

سخت ۲۳

نقیض گزاره « $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \geq 0) \wedge ([x] \in \mathbb{Z})$ » کدام است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 < 0) \wedge ([x] \notin \mathbb{Z})$
 (۲) $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 < 0) \vee ([x] \notin \mathbb{Z})$
 (۳) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 < 0) \wedge ([x] \notin \mathbb{Z})$
 (۴) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 < 0) \vee ([x] \notin \mathbb{Z})$

راه‌حل

$$\begin{aligned} &\neg(\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \geq 0) \wedge ([x] \in \mathbb{Z})) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \neg((x^2 \geq 0) \wedge ([x] \in \mathbb{Z})) \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 \geq 0) \vee \neg([x] \in \mathbb{Z}) \quad (\cdot 1-n/4) \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R} : (x^2 < 0) \vee ([x] \notin \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

فصل اول

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره نیست؟
 (۱) آیا $3+4=7$ است؟
 (۲) در پرتاب یک تاس، احتمال روشن شدن عدد ۵ برابر $\frac{1}{4}$ است.
 (۳) ایتالیا کشوری در اروپا است.
 (۴) تیم فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.
- ۲- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
 (۱) $2+5>7$
 (۲) این کتاب را خوب بخوانید.
 (۳) $x+1=2$
 (۴) به امید درمان همهٔ بیماران.
- ۳- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
 (۱) لطفاً خارج نشوید!
 (۲) $x^2+y^2=z^2$
 (۳) هزارمین رقم اعشار عدد π برابر ۷ است.
 (۴) آیا خسته‌اید؟
- ۴- ارزش کدام گزاره درست است؟
 (۱) حاصل ضرب هر دو عدد فرد عددی زوج است.
 (۲) هندوستان یکی از شهرهای پرجمعیت در قارهٔ آسیا است.
 (۳) دو عدد اول وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.
 (۴) مجموع هر دو عدد اول عددی زوج است.
- ۵- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $3+7\geq 5$
 (۲) هر معادلهٔ درجهٔ دوم حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.
 (۳) هر عدد زوج برابر مجموع دو عدد فرد است.
 (۴) معادلهٔ $3x+2=7$ در مجموعهٔ عددهای صحیح جواب ندارد.
- ۶- جدول ارزش‌های تعدادی گزاره ۳۲ حالت دارد. تعداد این گزاره‌ها برابر کدام است؟
 (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۸
 (۴) ۱۶
- ۷- جدول ارزش‌های تعدادی گزاره ۶۴ حالت دارد. در چندتا از این ۶۴ حالت ارزش دقیقاً دو گزاره درست است؟
 (۱) ۱۰
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۵
 (۴) ۲۰
- ۸- جدول ارزش‌های ۴ گزاره را در نظر بگیرید. در چند حالت ارزش حداقل یکی از این ۴ گزاره درست و حداقل یکی نادرست است؟
 (۱) ۷
 (۲) ۸
 (۳) ۱۲
 (۴) ۱۴
- ۹- کدام گزاره‌نما سه متغیره است؟
 (۱) a عددی فرد است.
 (۲) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{4}$ است.
 (۳) حاصل ضرب سه عدد برابر 360° است.
 (۴) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر ۱۰ است.
- ۱۰- مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای « x عددی زوج یا مضرب ۷ است» با دامنهٔ $D=\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۱۶
 (۲) ۱۷
 (۳) ۱۸
 (۴) ۱۹
- ۱۱- به ازای چند مقدار حقیقی x فقط یکی از دو گزاره‌نمای « $x(x-1)(x-2)=0$ » و « $x(x-1)(x-3)(x-4)=0$ » به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟
 (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳
- ۱۲- به ازای چند عدد طبیعی مانند a ، گزاره‌نمای « a عددی مرکب و کوچک‌تر از ۲۰ است» به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟
 (۱) ۱۰
 (۲) ۱۱
 (۳) ۱۲
 (۴) ۱۳



- ۱۳- به ازای چند پیشامد مانند A ، گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{3}$ است» به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌شود؟
 ۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۵ (۳) ۴۹ (۴) نادرست - نادرست
- ۱۴- به ازای چند زوج مرتب (x, y) ، گزاره‌نمای «در پرتاب دو تاس، اگر عددهای رو شده به ترتیب x و y باشند، آن‌گاه $x + 2y = 11$ » به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟
 ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) نادرست - درست
- ۱۵- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی باشند. کدام گزاره درست نیست؟
 (۱) $(a-1)(b-2) = 0 \Rightarrow (a=1 \vee b=2)$ (۲) $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 0 \Rightarrow (a=1 \wedge b=2)$
 (۳) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow (a=0 \wedge b=0)$ (۴) $ab(a+1) = 0 \Rightarrow (a=0 \vee b=0)$ نادرست - نادرست
- ۱۶- فرض کنید p گزاره «ماه مهر ۳۰ روز دارد» و q گزاره «تهران پایتخت ایران است» باشد. در این صورت ارزش گزاره $p \wedge \sim q$ و ارزش گزاره $\sim p \vee \sim q$ است.
 ۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست
- ۱۷- فرض کنید p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد. در این صورت ارزش گزاره $p \vee (p \wedge \sim q)$ و ارزش گزاره $\sim p \wedge (p \vee q)$ است.
 ۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست
- ۱۸- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 ۱) اگر $1=1$ ، آن‌گاه $2 \neq 1$ (۲) اگر $1 \neq 1$ ، آن‌گاه $2=1$ (۳) اگر $1=1$ ، آن‌گاه $2=1$ (۴) اگر $1 \neq 1$ ، آن‌گاه $2 \neq 1$
- ۱۹- ارزش کدام گزاره به انتفای مقدم درست است؟
 ۱) اگر 1 عددی فرد باشد، آن‌گاه 2 عددی زوج است. (۲) اگر 1 عددی فرد باشد، آن‌گاه 2 عددی فرد است.
 ۳) اگر 2 عددی فرد باشد، آن‌گاه 1 عددی زوج است. (۴) اگر 2 عددی زوج باشد، آن‌گاه 1 عددی زوج است.
- ۲۰- در چند حالت از چهار حالت جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow (p \wedge q)$ ارزش این گزاره درست است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) نادرست - درست
- ۲۱- ارزش کدام ترکیب دو شرطی نادرست است؟
 ۱) $2 > 1$ اگر و تنها اگر $3 \neq 4$. (۲) $2 > 5$ اگر و تنها اگر $2=2$.
 ۳) $4+1=6$ اگر و تنها اگر $2+3=7$. (۴) $1=1$ اگر و تنها اگر $2=2$.
- ۲۲- فرض کنید p گزاره «عدد حقیقی x وجود دارد به طوری که $x^2 - 1 = 0$ » و q گزاره «بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک عددهای ۳۵ و ۲۱ برابر ۷ است» باشد. کدام گزاره نادرست است؟
 ۱) $p \Leftrightarrow q$ (۲) $\sim p \Rightarrow q$ (۳) $\sim p \Rightarrow \sim q$ (۴) $\sim p \vee \sim q$ نادرست - نادرست
- ۲۳- فرض کنید ABC یک مثلث باشد. ارزش کدام گزاره درست نیست؟
 ۱) نقطه A روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد اگر و تنها اگر $AB=AC$.
 ۲) $AB=AC$ اگر و تنها اگر $\hat{B} = \hat{C}$.
 ۳) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
 ۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر میانه‌های آن هم‌مس باشد.
- ۲۴- در چند حالت از ۸ حالت جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow (q \vee r)$ ارزش این گزاره نادرست است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) نادرست - نادرست
- ۲۵- عکس ترکیب شرطی «اگر 2 عددی زوج باشد، آن‌گاه $3 > 5$ » کدام است؟
 ۱) اگر $3 > 5$ ، آن‌گاه 2 عددی زوج است. (۲) اگر 2 عددی زوج نباشد، آن‌گاه $3 \leq 5$.
 ۳) اگر $3 \leq 5$ ، آن‌گاه 2 عددی فرد است. (۴) اگر 2 عددی زوج نباشد، آن‌گاه $3 > 5$.
- ۲۶- عکس نقیض ترکیب شرطی «اگر علی به مغازه برود، آن‌گاه حسن به بانک می‌رود» کدام است؟
 ۱) اگر علی به مغازه نرود، آن‌گاه حسن به بانک نمی‌رود. (۲) اگر علی به مغازه برود، آن‌گاه حسن به بانک نمی‌رود.
 ۳) اگر حسن به بانک نرود، آن‌گاه علی به مغازه نمی‌رود. (۴) اگر حسن به بانک برود، آن‌گاه علی به مغازه نمی‌رود.



- ۲۷- نقیض گزاره «خورشید به دور زمین می‌چرخد و π عددی گویا است» کدام است؟
 (۱) زمین به دور خورشید می‌چرخد و π عددی گویا نیست.
 (۲) خورشید به دور زمین نمی‌چرخد و π عددی گویا نیست.
 (۳) خورشید به دور زمین نمی‌چرخد یا π عددی گویا نیست.
 (۴) زمین به دور خورشید می‌چرخد یا π عددی گویا نیست.
- ۲۸- نقیض گزاره «اگر $a > 2$ ، آن‌گاه $b > 1$ » کدام است؟
 (۱) اگر $a \leq 2$ ، آن‌گاه $b \leq 1$.
 (۲) اگر $b \leq 1$ ، آن‌گاه $a \leq 2$.
 (۳) $a > 2$ و $b \leq 1$
 (۴) $a > 2$ یا $b \leq 1$
- ۲۹- فرض کنید گزاره‌های p و q درست باشند. کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $p \vee q$ (۱) (۲) $p \wedge q$ (۳) $p \vee \neg q$ (۴) $p \wedge \neg q$
- ۳۰- فرض کنید گزاره‌های $p \Rightarrow q$ ، $\neg q \vee r$ و $\neg r$ درست باشند. کدام گزاره درست است؟
 (۱) p (۲) $\neg p$ (۳) q (۴) $p \vee q$
- ۳۱- فرض کنید گزاره‌های $p \Rightarrow q$ ، $q \Rightarrow r$ و $p \wedge s$ درست باشند. کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $r \wedge s$ (۲) $r \wedge q$ (۳) $r \Rightarrow \neg q$ (۴) $s \Rightarrow q$
- ۳۲- فرض کنید گزاره $(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد. کدام گزاره درست است؟
 (۱) $p \wedge q$ (۲) $p \wedge r$ (۳) $p \wedge \neg q$ (۴) $\neg p \wedge r$
- ۳۳- کدام استدلال درست است؟
 (۱) معدل دانش‌آموزی از مدرسه باامداد ۲۰ شده است. یاسر در مدرسه باامداد تحصیل می‌کند. نتیجه: معدل یاسر ۲۰ شده است.
 (۲) پدر حمید خانه یا ماشین دارد. پدر حمید خانه دارد. نتیجه: پدر حمید ماشین ندارد.
 (۳) اگر آرمان در تست پرش یا بارفیکس پذیرفته شود، به عضویت تیم درمی‌آید. آرمان در تست بارفیکس پذیرفته شده است. نتیجه: آرمان به عضویت تیم درمی‌آید.
 (۴) اگر معدل نصیر بالای ۱۹ شود، پدرش برای او دوچرخه می‌خرد. پدر نصیر برای او دوچرخه خریده است. نتیجه: معدل نصیر بالای ۱۹ شده است.
- ۳۴- یک تاس را پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم «عدد رو شده عددی اول است». «عدد رو شده کوچک‌تر از ۵ است» و «اگر عدد رو شده زوج باشد، بزرگ‌تر از ۳ است». عدد رو شده برابر کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵
- ۳۵- در جمع چهار نفره آرمین، خشایار، دانا و محسن هیچ دو نفری هم‌قد نیستند. می‌دانیم «آرمین کوتاه‌ترین نیست» و «خشایار از آرمین بلندتر و از دانا کوتاه‌تر است». چنانچه این ۴ نفر به ترتیب قد در یک صف بایستند، نفر دوم صف کدام است (کوتاه‌ترین نفر جلوی صف می‌ایستد)؟
 (۱) آرمین (۲) خشایار (۳) دانا (۴) محسن
- ۳۶- می‌دانیم «اگر آرش شاگرد اول شود، آن‌گاه به دانشگاه می‌رود و ماشین می‌خرد» و «آرش شاگرد اول نشده یا ماشین نخریده است». کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 (۱) آرش شاگرد اول نشده است.
 (۲) آرش به دانشگاه نرفته است.
 (۳) آرش ماشین نخریده است.
 (۴) هر سه نتیجه‌گیری درست است.
- ۳۷- می‌دانیم «اگر باران بیارد یا دلار گران شود، آن‌گاه روزنامه چاپ نمی‌شود» و «امروز باران می‌بارد یا روزنامه چاپ نمی‌شود». کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 (۱) امروز باران می‌بارد.
 (۲) امروز روزنامه چاپ نمی‌شود.
 (۳) امروز دلار گران می‌شود.
 (۴) امروز دلار گران نمی‌شود.



۹۹- نقیض گزاره « $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^y \in \mathbb{Z}$ » کدام است؟

- (۱) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x^y \notin \mathbb{Z}$
 (۲) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^y \in \mathbb{Z}$
 (۳) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x^y \in \mathbb{Z}$
 (۴) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^y \notin \mathbb{Z}$

کنکور سراسری

۱۰۰- علی، احمد، روزبه، داود و حامد برحسب اندازه قد مرتب می‌شوند. می‌دانیم که حداقل دو نفر آنان از علی کوتاه‌تر هستند - داود از روزبه کوتاه‌تر است - احمد کوتاه‌ترین پسر نیست - داود از علی بلندتر است. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

ریاضی - ۹۷

- (۱) روزبه بلندتر از علی (۲) داود بلندتر از احمد (۳) احمد بلندتر از حامد (۴) احمد بلندتر از علی

ریاضی - ۹۸

۱۰۱- گزاره $(p \Rightarrow q) \sim$ با کدام گزاره زیر هم‌ارزش است؟

- (۱) $\sim p \vee q$ (۲) $p \vee \sim q$ (۳) $\sim p \wedge q$ (۴) $p \wedge \sim q$

ریاضی - ۹۸

۱۰۲- گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; P(x, y)$ با کدام گزاره نمای دارای ارزش درست است؟

- (۱) $y - x = 6$ (۲) $x - y = 6$ (۳) $x + y = 6$ (۴) $xy = 6$

ریاضی خارج از کشور - ۹۸

۱۰۳- گزاره $(p \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ با کدام گزاره زیر، هم‌ارزش است؟

- (۱) $p \vee (q \wedge r)$ (۲) $p \wedge (q \vee r)$ (۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$ (۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

ریاضی خارج از کشور - ۹۸

۱۰۴- کدام گزاره سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 > 2x$ (۲) $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} = x$
 (۳) $\exists x \in \mathbb{R} : |x + \frac{1}{x}| < 2$ (۴) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$



فصل اول

خودآزمایی (۱)

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
 - (۱) چه میز زیبایی! (۲) مریم سال ۱۳۸۵ ازدواج کرد. (۳) تخته را پاک کن. (۴) آیا این بلزی را می‌بریم؟
- ۲- به ازای چند عدد طبیعی مانند a ، گزاره‌های « $a > 10$ » یا a بر 3 بخش پذیر است» به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌شود؟

(۱) ۴	(۲) ۵	(۳) ۶	(۴) ۷
-------	-------	-------	-------
- ۳- در چند حالت از جدول ارزش‌های پنج گزاره، ارزش دقیقاً سه گزاره درست است؟

(۱) ۵	(۲) ۱۰	(۳) ۱۵	(۴) ۲۰
-------	--------	--------	--------
- ۴- فرض کنید p گزاره «در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر با هم برابرند» و q گزاره «۲ عددی اول است» باشد. کدام گزاره درست است؟

(۱) $p \leftrightarrow \sim q$	(۲) $p \wedge \sim q$	(۳) $p \vee \sim q$	(۴) $q \Rightarrow p$
--------------------------------	-----------------------	---------------------	-----------------------
- ۵- ارزش کدام گزاره به انتقای مقدم درست است؟

(۱) اگر $2 > 3$ ، آن‌گاه $3 > 5$.	(۲) اگر $2 \geq 3$ ، آن‌گاه $5 \geq 3$.	(۳) اگر $3 > 2$ ، آن‌گاه $3 > 5$.	(۴) اگر $2 > 3$ ، آن‌گاه $3 < 5$.
------------------------------------	--	------------------------------------	------------------------------------
- ۶- می‌دانیم «اگر مریم ۲۰ بگیرد، آن‌گاه باران می‌بارد» و «اگر مریم ۲۰ بگیرد، آن‌گاه باران نمی‌بارد». کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) مریم ۲۰ می‌گیرد.	(۲) مریم ۲۰ نمی‌گیرد.	(۳) باران می‌بارد.	(۴) باران نمی‌بارد.
----------------------	-----------------------	--------------------	---------------------
- ۷- راستگو همیشه راست و دروغگو همیشه دروغ می‌گوید. تام گفت: «اگر جری دروغگو باشد، آن‌گاه من نیز دروغگو هستم». کدام گزینه درست است؟

(۱) تام و جری هر دو راستگو هستند.	(۲) تام و جری هر دو دروغگو هستند.
(۳) تام راستگو و جری دروغگو است.	(۴) تام دروغگو و جری راستگو است.
- ۸- فرض کنید گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow (r \vee s)$ درست و گزاره $p \Rightarrow r$ نادرست باشد. کدام گزاره درست است؟

(۱) $q \Rightarrow r$	(۲) $r \Rightarrow s$	(۳) $s \Rightarrow r$	(۴) $q \wedge \sim s$
-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------
- ۹- نقیض گزاره $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ هم‌ارز کدام است؟

(۱) $p \wedge q$	(۲) $p \vee q$	(۳) p	(۴) $\sim p$
------------------	----------------	---------	--------------
- ۱۰- کدام گزینه درست نیست؟

(۱) $p \wedge (\sim p \wedge q) \equiv q$	(۲) $p \vee (\sim p \vee q) \equiv T$	(۳) $p \wedge (p \Rightarrow T) \equiv p$	(۴) $p \wedge (T \Rightarrow p) \equiv p$
---	---------------------------------------	---	---
- ۱۱- کدام هم‌ارزی درست است؟

(۱) $\sim p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow p$	(۲) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim q \Leftrightarrow \sim p$	(۳) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$	(۴) $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$
--	---	---	--
- ۱۲- کدام هم‌ارزی درست است؟

(۱) $F \Rightarrow p \equiv T$	(۲) $p \Leftrightarrow F \equiv F$	(۳) $p \Leftrightarrow p \equiv p$	(۴) $T \Rightarrow p \equiv T$
--------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	--------------------------------
- ۱۳- گزاره $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام است؟

(۱) $(p \vee q) \Rightarrow r$	(۲) $(p \wedge q) \Rightarrow r$	(۳) $(p \vee q) \Rightarrow \sim r$	(۴) $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$
--------------------------------	----------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------------
- ۱۴- گزاره $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ هم‌ارز کدام است؟

(۱) T	(۲) F	(۳) p	(۴) $\sim p$
---------	---------	---------	--------------
- ۱۵- نمایش گزاره «برای هر عدد طبیعی مانند n ، $n + 1$ عددی اول است» با استفاده از نمادهای ریاضی به کدام صورت است؟ (P مجموعه عددهای اول است).

(۱) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \in P$	(۲) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \in P$	(۳) $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 + 1 \in P$	(۴) $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 + 1 \in P$
--	--	--	--
- ۱۶- کدام گزاره درست است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$	(۲) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$	(۳) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2x - 1$	(۴) $\forall x \in \mathbb{R} : \tan x \cot x = 1$
--	---	--	--
- ۱۷- ارزش کدام گزاره درست است؟

(۱) در هر متوازی‌الاضلاع اندازه دو قطر با هم برابرند.	(۲) در هر مستطیل دو قطر بر یکدیگر عمودند.
(۳) در هر لوزی دو قطر بر یکدیگر عمودند.	(۴) وجود دارد مستطیلی که قطرهای آن با هم برابر نیستند.



- ۱۸- کدام گزاره نادرست است؟
- (۱) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 0$
- (۲) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x+y \in \mathbb{Z}$
- (۳) $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}: x^n \geq 0$
- (۴) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: x^n > 0$
- ۱۹- نقیض گزاره « $\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 = -1) \vee (x^2 = 7)$ » کدام است؟
- (۱) $\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq -1) \vee (x^2 \neq 7)$
- (۲) $\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq -1) \wedge (x^2 \neq 7)$
- (۳) $\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq -1) \vee (x^2 \neq 7)$
- (۴) $\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq -1) \wedge (x^2 \neq 7)$
- ۲۰- نقیض گزاره « عددی صحیح وجود دارد که نه اول است و نه مرکب » کدام است؟
- (۱) عددی صحیح وجود دارد که هم اول است و هم مرکب.
- (۲) عددی صحیح وجود دارد که یا اول است یا مرکب.
- (۳) هر عدد صحیح یا اول است یا مرکب.
- (۴) هر عدد صحیح نه اول است و نه مرکب.

فصل اول

خودآزمایی (۲)

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره نیست؟
- (۱) تهران، پایتخت ایران است. (۲) $1+1=3$ (۳) ساعت چند است؟ (۴) امروز جمعه است.
- ۲- مجموعه جواب گزاره‌نمای « $x^3(x^2-1)(x^3+1)=0$ » با دامنه عددهای حقیقی چند عضو دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۳- ارزش کدام گزاره درست است؟
- (۱) $(\Delta > \gamma) \wedge (\Gamma + 2 = 6)$ (۲) $(\Delta > \gamma) \Rightarrow (\Gamma + 2 = 6)$ (۳) $(\Gamma + 2 = 6) \Rightarrow (\Delta > \gamma)$ (۴) $(\Delta > \gamma) \vee \sim (\Gamma + 2 = 6)$
- ۴- فرض کنید p گزاره « ۵ عددی زوج است » و q گزاره « $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ » باشد. کدام گزاره نادرست است؟
- (۱) $p \vee q$ (۲) $\sim p \wedge q$ (۳) $p \Rightarrow q$ (۴) $p \vee \sim q$
- ۵- کدام استدلال درست نیست؟
- (۱) معدل همه دانش‌آموزان مدرسه ابن‌سینا بالاتر از ۱۷ است. حمید دانش‌آموزی از مدرسه ابن‌سینا است. نتیجه: معدل حمید بالاتر از ۱۷ است.
- (۲) اگر آرش درس نخواند، خوابش می‌برد. آرش بیدار است. نتیجه: آرش درس می‌خواند.
- (۳) همه ساکنان برج آسمان تلفن همراه دارند. دانا ساکن برج آسمان نیست. نتیجه: دانا تلفن همراه ندارد.
- (۴) آیدین یا حامد عضو تیم فوتبال مدرسه هستند. حامد عضو تیم فوتبال مدرسه نیست. نتیجه: آیدین عضو تیم فوتبال مدرسه است.
- ۶- می‌دانیم « بابک خردمند نیست یا ناراحت است » و « اگر بابک خردمند نباشد، فیلسوف نیست ». کدام گزینه درست است؟
- (۱) اگر بابک فیلسوف باشد، ناراحت است. (۲) اگر بابک خردمند باشد، فیلسوف است. (۳) اگر بابک فیلسوف نباشد، ناراحت نیست. (۴) اگر بابک ناراحت نباشد، فیلسوف است.
- ۷- می‌دانیم « اگر هوا آفتابی باشد، آنگاه زمین خشک است و پرندگان آواز می‌خوانند » و « هوا آفتابی نیست یا پرندگان آواز نمی‌خوانند ». کدام نتیجه‌گیری درست است؟
- (۱) هوا آفتابی نیست. (۲) زمین خشک است. (۳) زمین خشک نیست. (۴) پرندگان آواز نمی‌خوانند.

پاسخ پرسش‌های چهار گزینه‌ای

۱- گزینه ۱ جمله گزینه (۱) جمله‌ای پرستی است، پس این جمله گزاره نیست. توجه کنید که سه جمله دیگر همگی خبری اند، بنابراین هر سه گزاره‌اند.

۲- گزینه ۱ جملات گزینه‌های (۲) و (۴) به ترتیب امری و عاطفی هستند. در نتیجه این دو گزاره نیستند. همچنین جمله گزینه (۳) در واقع یک گزاره‌نما است. در نتیجه این جمله نیز گزاره نیست. تنها جمله خبری جمله گزینه (۱) است، بنابراین فقط این جمله گزاره است.

۳- گزینه ۳ جمله گزینه (۱) امری است. در نتیجه این جمله گزاره نیست. جمله گزینه (۲) یک گزاره‌نما است در نتیجه این جمله نیز گزاره نیست. جمله گزینه (۳) جمله‌ای خبری است. در نتیجه این جمله گزاره است. جمله گزینه (۴) پرستی است. در نتیجه این جمله گزاره نیست.

۴- گزینه ۳ گزینه (۱) نادرست است، زیرا حاصل ضرب هر دو عدد فرد عددی فرد است.

گزینه (۲) نادرست است، زیرا هندوستان یک کشور است. گزینه (۳) درست است، زیرا مجموع عددهای اول ۳ و ۷ برابر ۱۰ است. گزینه (۴) نادرست است؛ به عنوان مثال نقض، مجموع دو عدد اول ۲ و ۳ عددی فرد است.

۵- گزینه ۲ گزاره گزینه (۱) به وضوح درست است. گزاره گزینه (۲) نادرست است؛ به عنوان مثال نقض، معادله $x^2 + 1 = 0$ ریشه حقیقی ندارد. گزاره گزینه (۳) درست است، زیرا $2k = 1 + (2k - 1)$ پس هر عدد زوج مانند $2k$ مجموع دو عدد فرد ۱ و $2k - 1$ است.

گزاره گزینه (۴) نیز درست است، زیرا از $3x + 2 = 7$ نتیجه می‌گیریم $x = \frac{5}{3}$ که عددی غیر صحیح است. پس معادله $3x + 2 = 7$ در مجموعه عددهای صحیح جواب ندارد.

۶- گزینه ۲ می‌دانیم جدول ارزش‌های Ω گزاره 2^{Ω} حالت دارد، بنابراین $2^{\Omega} = 32$ پس $\Omega = 5$.

۷- گزینه ۳ اگر تعداد گزاره‌ها برابر Ω باشد، آن‌گاه $2^{\Omega} = 64$ پس $\Omega = 6$. در نتیجه تعداد حالت‌هایی که ارزش دقیقاً دوتا از گزاره‌ها درست است، برابر $\binom{6}{2} = 15$ است.

۸- گزینه ۴ روی تعداد گزاره‌های درست و نادرست حالت‌بندی می‌کنیم و پاسخ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} S & W & I & B & H & -1 & S & W & I & B & H & -2 & S & W & I & B & H & -3 \\ S & W & I & B & H & -3 & S & W & I & B & H & -2 & S & W & I & B & H & -1 \end{matrix}$$

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 4 + 6 + 4 = 14$$

۹- گزینه ۳ در گزاره‌نمای گزینه (۱) فقط یک متغیر B وجود دارد، در نتیجه این گزاره‌نما یک متغیره است. در گزاره‌نمای گزینه (۲) نیز فقط یک متغیر A وجود دارد. در نتیجه این گزاره‌نما نیز یک متغیره است. گزاره‌نمای گزینه (۳) را می‌توانیم به صورت $abc = 36$ بنویسیم که سه متغیره است و گزاره‌نمای گزینه (۴) را می‌توانیم به صورت $3a + 2b = 1$ بنویسیم که دو متغیره است.

۱۰- گزینه ۲ فرض کنید A مجموعه عددهای زوج در D و B مجموعه عددهای مضرب در D باشد. در این صورت مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $A \cup B$ است. اکنون توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 4 - 2 = 17$$

۱۱- گزینه ۴ گزاره‌نمای اول به ازای $x = 1, 2$ به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود و گزاره‌نمای دوم به ازای $x = 1, 3, 4$ به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود. بنابراین به ازای $x = 2, 3, 4$ فقط یکی از دو گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

۱۲- گزینه ۱ مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر است با $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$ که ۱۰ عضو دارد.

۱۳- گزینه ۴ فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک تاس برابر $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. اگر احتمال پیشامد A برابر $\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3} \Rightarrow n(A) = \frac{1}{3}n(S) = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

بنابراین اگر پیشامد A دو عضوی باشد، گزاره‌نمای داده شده به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود. در نتیجه تعداد پیشامدهایی مانند A که گزاره‌نمای داده شده به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌شود برابر است با

$$|A \cap \bar{A}| = |A \cap \bar{A}| + |A \cap \bar{A}| = 2^6 - \binom{6}{2} = 64 - 15 = 49$$

۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر است با $\{(1, 5), (3, 4), (5, 3)\}$

۱۵- گزینه ۴ اگر $ab(a+1) = 0$ آن‌گاه ممکن است a برابر -1 باشد، بنابراین نمی‌توان نتیجه گرفت که a یا b برابر صفر است.

۱۶- گزینه ۴ چون ماه مهر ۳۰ روز دارد و تهران پایتخت ایران است، پس هر دو گزاره p و q درست‌اند. اکنون از اینکه p درست و q نادرست است نتیجه می‌گیریم که گزاره $p \wedge q$ نادرست است و از اینکه $\neg p$ و $\neg q$ نادرست‌اند، نتیجه می‌گیریم $\neg p \vee \neg q$ نیز نادرست است.

۱۷- گزینه ۲

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge \neg q)$	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

۱۸- گزینه ۳ می‌دانیم ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. در بین چهار گزاره داده شده فقط گزاره گزینه (۳) این ویژگی را دارد. در واقع « $1=1$ » گزاره‌ای درست و « $2=1$ » گزاره‌ای نادرست است.



۳۰- گزینه ۲ چون $\neg I$ درست است، پس \neg نادرست است. چون \neg نادرست و $\neg q \vee r$ درست است، پس q نادرست است. چون q نادرست و $p \Rightarrow q$ درست است، پس p نادرست است. در نتیجه در بین گزاره‌های داده شده p ، q و $p \vee q$ نادرست‌اند و $\neg p$ درست است.

۳۱- گزینه ۳ چون $p \wedge s$ درست است، پس هر دو گزاره p و s درست‌اند. چون p و $p \Rightarrow q$ درست‌اند، پس q نیز درست است. چون q و $q \Rightarrow r$ درست‌اند، پس r نیز درست است. در نتیجه گزاره‌های $r \wedge s$ ، $r \wedge q$ و $s \Rightarrow q$ همگی درست‌اند. ولی در گزاره شرطی $r \Rightarrow \neg q$ ، مقدم (r) درست و نالی ($\neg q$) نادرست است، در نتیجه این گزاره شرطی نادرست است.

۳۲- گزینه ۳ چون گزاره شرطی $(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست است، پس مقدم این ترکیب شرطی (یعنی $p \Leftrightarrow \neg q$) درست و نالی آن (یعنی $q \vee r$) نادرست است.

چون $q \vee r$ نادرست است، پس هر دو گزاره q و r نادرست‌اند. چون q نادرست است، پس $\neg q$ درست است.

چون $\neg q$ و $p \Leftrightarrow \neg q$ درست‌اند، پس p نیز درست است. نتیجه می‌گیریم گزاره‌های $p \wedge q$ ، $p \wedge r$ و $\neg p \wedge r$ نادرست‌اند و گزاره $p \wedge \neg q$ درست است.

۳۳- گزینه ۳

۳۴- گزینه ۳ از گزاره اول نتیجه می‌گیریم عدد رو شده برابر ۲، ۳ یا ۵ است. اکنون از این گزاره و گزاره دوم نتیجه می‌گیریم عدد رو شده برابر ۲ یا ۳ است. همچنین از گزاره سوم نتیجه می‌گیریم عدد رو شده برابر ۲ نمی‌تواند باشد (زیرا ۲ عددی زوج است ولی از ۳ بزرگتر نیست). بنابراین عدد رو شده برابر ۳ است.

۳۵- گزینه ۱ از گزاره دوم نتیجه می‌گیریم خشایار بعد از آرمین ودانا بعد از خشایار در صف قرار می‌گیرند. همچنین از گزاره اول نتیجه می‌گیریم آرمین جلوی صف قرار ندارد، بنابراین محسن باید جلوی صف قرار گیرد. پس آرمین نفر دوم صف است.

جلوی صف
محسن
آرمین
خشایار
دانا

۳۶- گزینه ۱ اگر آرش شاگرد اول شده باشد، از درستی گزاره اول نتیجه می‌گیریم ماشین خریداری شده است و از درستی گزاره دوم نتیجه می‌گیریم ماشین نخریده است. بنابراین به تناقض می‌رسیم، پس آرش شاگرد اول نشده است. همچنین توجه کنید که شاگرد اول نشدن آرش برای درست بودن دو گزاره داده شده کافی است، پس در مورد دانشگاه رفتن او و ماشین خریدنش هیچ نظر قطعی نمی‌توان داد.

۳۷- گزینه ۲ دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول امروز باران بیارد. از درستی گزاره اول و از اینکه امروز باران می‌بارد نتیجه می‌گیریم امروز روزنامه چاپ نمی‌شود.

حالت دوم امروز باران نیارد. از درستی گزاره دوم و از اینکه امروز باران نمی‌بارد نتیجه می‌گیریم امروز روزنامه چاپ نمی‌شود. پس در هر دو حالت امروز روزنامه چاپ نمی‌شود.

۱۹- گزینه ۳ می‌دانیم که اگر در یک گزاره شرطی ارزش مقدم نادرست باشد، گزاره شرطی به انتهای مقدم درست است. در بین چهار گزاره داده شده فقط گزاره سوم این ویژگی را دارد. زیرا ارزش مقدم این گزاره، یعنی «۲ عددی فرد است» نادرست است.

۲۰- گزینه ۳ توجه کنید که

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۰	۰	۰	۱

۲۱- گزینه ۲ می‌دانیم ارزش ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ وقتی نادرست است که یکی از p و q درست و دیگری نادرست باشد. در بین چهار ترکیب دو شرطی داده شده فقط گزینه (۲) این ویژگی را دارد. زیرا « $3 > 5$ » گزاره‌ای نادرست و « $2 = 2$ » گزاره‌ای درست است.

۲۲- گزینه ۴ چون به ازای $x=1$ ، $x^2 - 1 = 0$ ، پس گزاره‌ای درست است و چون بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای ۳۵ و ۲۱ برابر ۷ است، پس q نیز گزاره‌ای درست است.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim p \vee \sim q$
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰

۲۳- گزینه ۴ سه گزینه اول قضیه‌های معروف دو شرطی در هندسه هستند، بنابراین ارزش این سه گزاره درست است. در مورد گزاره گزینه چهارم می‌دانیم میانه‌ها در هر مثلثی هم‌مس‌اند و نه فقط در مثلث‌های متساوی‌الساقین! در نتیجه این گزاره نادرست است.

۲۴- گزینه ۳

p	q	r	$q \vee r$	$p \Leftrightarrow (q \vee r)$
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۰	۰	۱

۲۵- گزینه ۱ عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ »، ترکیب شرطی « $q \Rightarrow p$ » است.

۲۶- گزینه ۳ عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ »، ترکیب شرطی « $\neg q \Rightarrow \neg p$ » است.

۲۷- گزینه ۳ طبق قانون دموکران نقیض گزاره « p و « q » هم‌ارز گزاره « $\neg p$ یا « $\neg q$ » است.

۲۸- گزینه ۳ می‌دانیم $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. در نتیجه

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv (\neg \neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$$

بنابراین اگر p گزاره « $a > 2$ » و q گزاره « $b > 1$ » باشد، $\neg q$ گزاره « $b \leq 1$ » است، پس $p \wedge \neg q$ گزاره « $a > 2$ و « $b \leq 1$ » است.

۲۹- گزینه ۴ چون گزاره‌های p و $p \Rightarrow q$ درست‌اند، پس q نیز درست است. بنابراین گزاره‌های $p \vee q$ ، $p \wedge q$ و $p \vee \neg q$ درست و گزاره $p \wedge \neg q$ نادرست است.



گزینه ۴- گزاره ۲ داده شده ۲- است. اگر ارزش گزاره‌های p ، q و r همانند جدول زیر باشد. در این صورت گزاره‌های $(\neg q \vee r)$ و $\neg p \Rightarrow r$ و $q \Rightarrow r$ به انتقای مقدم درست‌اند ولی گزاره ۲- نادرست است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۴۲- گزینه ۳ چهار حالت برای راستگو و دروغگو بودن تام و جری وجود دارد. در هر حالت ارزش راست یا دروغ بودن جمله گفته شده توسط تام را تعیین می‌کنیم.

حداقل یکی از نام و جری دروغگو است	جری	نام
دروغ	راستگو	راستگو
راست	دروغگو	راستگو
راست	راستگو	دروغگو
راست	دروغگو	دروغگو

توجه کنید در حالت اول نام تام راستگو است و جمله‌ای دروغ به زبان آورده و در حالت‌های سوم و چهارم دروغگو است و جمله‌ای راست به زبان آورده است. پس تنها حالت قابل قبول حالت دوم این جدول است.

۴۳- گزینه ۴ چهار حالت برای راستگو و دروغگو بودن تام و جری وجود دارد. در هر حالت پاسخ تام و جری را به سؤال پرسیده شده به دست می‌آوریم. از این جدول نتیجه می‌گیریم گزینه ۴) درست است و بقیه گزینه‌ها درست نیستند.

پاسخ جری	پاسخ تام	جری	نام
بله	بله	راستگو	راستگو
خیر	بله	دروغگو	راستگو
بله	خیر	راستگو	دروغگو
بله	بله	دروغگو	دروغگو

۴۴- گزینه ۳ راه‌حل اول

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$p \vee r$	
د	د	د	د	د	د	✓
د	د	ن	د	ن	د	✗
د	ن	د	د	د	د	✓
د	ن	ن	د	ن	د	✗
ن	د	د	د	د	د	✓
ن	د	ن	د	ن	ن	✗
ن	ن	د	ن	د	د	✓
ن	ن	ن	ن	د	ن	✗

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید در حالت‌های اول، سوم، پنجم و هفتم از جدول فوق هر دو گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ و $p \vee r$ درست‌اند. در این حالت‌ها از بین چهار گزاره داده شده در گزینه‌ها فقط گزاره ۲ در همه حالت‌ها درست است. بنابراین از درستی دو گزاره داده شده، درستی گزاره ۲ نتیجه می‌شود.

راه‌حل دوم از درستی گزاره $p \vee r$ نتیجه می‌گیریم حداقل یکی از p و r درست است. پس اگر p نادرست باشد، آنگاه r درست است. همچنین اگر گزاره p درست باشد، گزاره $p \vee q$ نیز درست است. بنابراین از درستی $(p \vee q) \Rightarrow r$ نتیجه می‌گیریم r درست است. پس در هر صورت گزاره ۲ باید درست باشد.

۲۸- گزینه ۱ فرض کنید p گزاره «آرش دانشجوی برق است»، q گزاره «حمید دانشجوی مکانیک است» و r گزاره «کامران دانشجوی صنایع است» باشد. طبق فرض گزاره‌های $p \vee q$ و $r \vee \neg q$ درست‌اند. دو حالت در نظر می‌گیریم. **حالت اول** q نادرست باشد. از اینکه q نادرست و $p \vee q$ درست است نتیجه می‌گیریم p درست است.

حالت دوم q درست باشد. در این صورت $\neg q$ نادرست است. از اینکه $\neg q$ نادرست و $r \vee \neg q$ درست است نتیجه می‌گیریم r درست است. بنابراین حداقل یکی از گزاره‌های p و r درست است. پس گزاره $p \vee r$ قطعاً درست است.

۲۹- گزینه ۳ از درستی دو گزاره شرطی داده شده نتیجه می‌گیریم «اگر سینا به منطق علاقه داشته باشد، ثروتمند است». چون هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است، پس «اگر سینا ثروتمند نباشد، به منطق علاقه ندارد».

۴۰- گزینه ۴ فرض کنید p گزاره «پلیس قاتل رادستگیر کند»، q گزاره «قاتل اعدام شود» و r گزاره «قاتل اثری از خود بر جای گذاشته باشد» باشد. طبق فرض گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $r \Rightarrow p$ درست‌اند. اکنون گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱) چون $r \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow q$ درست‌اند، پس $r \Rightarrow q$ نیز درست است (زیرا از درستی r درستی p و از درستی p درستی q نتیجه می‌شود، بنابراین از درستی r درستی q نتیجه می‌شود، یعنی گزاره $r \Rightarrow q$ درست است).

گزینه ۲) چون $p \Rightarrow q$ درست است، پس عکس نقیض آن (که هم‌ارز با آن است) نیز درست است، پس $\neg q \Rightarrow \neg p$ نیز درست است.

گزینه ۳) چون $r \Rightarrow p$ درست است، پس عکس نقیض آن یعنی $\neg p \Rightarrow \neg r$ نیز درست است.

گزینه ۴) از درستی $p \Rightarrow q$ و $r \Rightarrow p$ الزاماً درستی $q \Rightarrow r$ نتیجه نمی‌شود. مثلاً اگر گزاره‌های p و q درست و گزاره r نادرست باشد، آن‌گاه گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $r \Rightarrow p$ درست‌اند ولی گزاره $q \Rightarrow r$ نادرست است.

۴۱- گزینه ۱ فرض کنید p گزاره «مینا دانش آموز خوبی است»، q گزاره «مینا باهوش است» و r گزاره «مینا تنبل است» باشد. طبق فرض گزاره‌های $(\neg q \vee r) \Rightarrow p$ و $\neg p \Rightarrow r$ درست‌اند. نشان می‌دهیم گزاره گزینه ۱) درست است ولی بقیه گزاره‌ها ممکن است نادرست باشند.

گزینه ۱) گزاره داده شده $q \Rightarrow p$ است. نشان می‌دهیم این گزاره درست است. اگر $q \Rightarrow p$ نادرست باشد، آن‌گاه q درست و p نادرست است. اکنون از اینکه q و $q \Rightarrow p$ درست‌اند، نتیجه می‌گیریم $\neg r$ درست است، پس r نادرست است. در نتیجه

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)$
د	د	د	ن	ن	ن	د
د	د	ن	ن	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

پس $\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)$ گزاره‌ای نادرست است که این خلاف فرض است. از تلقض حاصل نتیجه می‌گیریم گزاره $q \Rightarrow p$ درست است.

گزینه ۲) گزاره داده شده $r \Rightarrow p$ است. اگر ارزش گزاره‌های p ، q و r همانند جدول بعد باشد. در این صورت گزاره‌های $(\neg q \vee r) \Rightarrow p$ و $\neg p \Rightarrow r$ به انتقای مقدم درست‌اند ولی گزاره $r \Rightarrow p$ نادرست است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

گزینه ۳) گزاره داده شده $p \Rightarrow q$ است. اگر ارزش گزاره‌های p ، q و r همانند جدول زیر باشد. در این صورت گزاره‌های $(\neg q \vee r) \Rightarrow p$ و $\neg p \Rightarrow r$ به انتقای مقدم درست‌اند ولی گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن